Akademisk Afhandling

Om ett vidsträktare bruk af Qvadrat- och Rutetalens tabell vid Division,

hvilken

med Vidtberömda Filofiska Fakultetens tillstånd

och under Præsidium

af

Mag. CARL JOH. Ds. HILL,
Math. Professor, R. N. O., L. K. V. A.,

för

Filosofiska Doktorsgraden

utgifves

af

DAVID RICHARD WARHOLM,
Filos. Kand., af Göthiska Nationen,

SCAN. LOGD. BAT. BIBL.

att offentligen försvaras

å Mathematiska Lärosalen den 10 Juni 1850.

VII.

Lund,
tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1850.

och $\frac{nD}{r} . x^2$ med logarithmer, till och med några siffror af $\frac{nD}{r} . x^3$, i fall så skulle äskas. Vill man ha qvoten nogare, så får man multiplicera medelst qvadrattabellen och dividera resten på samma sätt. Så blir i det första Exemplet $\frac{r}{n} = \frac{25}{33}$,

och $x = 0{,}00117116$, $\frac{nD}{r} = 1165{,}656261 = D'$

$$-1{,}365170 = -xD'$$
$$0{,}001599 = x^2D'$$
$$(-1)$$
$$1164{,}292690 = \text{qvoten.}$$

$$Lx = \bar{3}{,}0685940$$
$$+\ 223$$
$$LD' = 3{,}0665495$$
$$187$$
$$22{,}4$$
$$,9$$
$$L(xD') = 0{,}1351868$$
$$223$$
$$L(x^2D') = \bar{3}{,}2038$$

Der sidsta siffran (i och för $- x^3D'$) högst kan vara ett (1) för stor.

D) Uti sin Tetragonometria Tabularia, Lpz. 1690. IV:o p. 60—86 förklarar Job Ludolf (tämligen otydligt) ett eget divisionssätt, som egentligen går ut på att räkna efter formlen $b = \sqrt{a^2 + 2p + b^2} - a$, om p är dividenden, a divisorn och b qvoten. Men det är alltför indirect, och fast han använder sin 5-siffriga tabell finner han ej mera än 2 siffror i sender, ja stundom blott en.

E) Naturligare vill det synas, att omvända föregående multiplications-sätt enligt formlen $a . b = c^2 - d^2$, der $2c = a + b$ och $2d = a - b$, eller $a = c + d$ & $b = c - d$. Skall nu $a . b$ vara $= p$, så blir $c^2 = p + d^2$ och $c = \sqrt{p + d^2}$, der dock $d = a - c$ är lika obekant som c. Om man dock vet, att b är nära $= a$, så är d liten, och d^2 relativt ännu mindre, (särdeles om $d < 1$), hvarför denna qvadrat att börja med kan negligeras. Denna formels användbarhet beror derföre derpå, om man kan göra a nära $= b$. Till den ändan sätt $a . x = a'$, och $a' . b' = p$, samt antag, att qvoten b' är nära $= a'$, så blir $ab = p = a' . b' = ax . b'$, således $b' = \frac{ab}{ax} = \frac{b}{x}$ och eq. $a' = b'$ ger $ax = \frac{b}{x}$, $x^2 = \frac{b}{a}$, $x = \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{p}}{a}$. D. ä. operation går ej för sig utan medelst både en division och en utdragning af qvadratrot, (hvartill vi derföre få hänvisa) — och har så allt utseende af en petitio principii.

F) *Fourrier* har uppgifvit ett eget divisions-sätt, som han kallar *division ordonnée*, och skall vara särdeles lämpligt för eqationers lösning, der divisorns flere siffror först under operationens fortgång blifva bekanta. Den skiljer sig från vanlig division deri, att man blott delvis (siffra för siffra) drar producten från dividenden. Om nemligen

	Divisorn (d)	Dividenden (D)	qvoten (q) =
	är 9753864579	2468357924	253064

eller $d = 9 + 7 + 5 + 3 + x$ samt $q = 2 + 5 + 3 + y$,

(der puncterna erinra om siffrornes behöriga decimalrum),

så är $d \,.\, q = (9 + 7 + 5 + 3 + x) \,.\, (2 + 5 + 3 + y) =$

$$= 2.9 + 2.7 + 2.5 + 2.3 + 2x$$
$$+ 5.9 + 5.7 + 5.5 + 5.3 + \ldots$$
$$+ 3.9 + 3.7 + 3.5 + \ldots$$
$$+ y.9 + $$

Der, såsom man lätt inser, producterne i samma spalt (såsom 2 . 7 + 5 . 9) höra till samma decimalrum, och derföre frândragas, när den dithörande siffran från dividenden är nedflyttad. Räkningen blir derföre följande:

```
9753864579)2468³57924(253064
        —18(=2.9)        (2
        (2 < 6)6
correction = — 14(=2.7)
        9) 52            (5
        —45(=5.9)
    (2+5<=7)8
    corr. — 45(=2.5+5.7)
        9) 33            (3
           27
  (2+5+3 > 6)3ᵛ
    corr. — 52(=2.3+5.5+3.7)
        9) 11 (1, eller,     då 3 var osäker,
       97) 115  (0 *)
    corr. — 46(=2.8+5.3+3.5)
  eller 97) 69  (0 < y
             0
           697
    corr. — 61(=2.6+5.8+3.3+0.5)
       97) 636  (6
           582
           549
    corr. — 92(=2.4+5.6+3.8+0.3+6.5)
       97) 457  (4
```

*) Division ger väl 1, men 115—1.97 = 18 befinnes mindre än blifvande correction

2.8 + 5.3 + 3.5 = 46.

Facit:

$q = 253064 \ldots$

Anm. Är summan af de funna qvotsiffrorne mindre än resten, så är den sidsta ej för stor, annars kan den möjligen behöfva minskas. Se vid klamarne. Derefter tages flere siffror till största divisorn, såsom här 97.

G) Har man en liten reciprocal tabell (t. ex. Barlows), der $\frac{1}{d}$ är förvandlad i decimalbråk, så behöfver man blott multiplicera dividenden D dermed, ty $\frac{D}{d} =$ $= \frac{1}{d} . D = d^{-1} . D$. Såsom $\frac{1}{9,754} = 0,102522 = d^{-1}$, hvarföre i samma Ex.

$D . d^{-1} =$ 246836
61709 ($= \frac{1}{4}D$)
493672
493672

$q = 25306$ hvarmed man kan multiplicera d, och finna en rest hvilken divideras på samma sätt, o. s. v. tills man har qvoten med nog många siffror. (Om en väl inrättad decimaltabell . . . särskilt).

H) En sådan tabell, eller i allmänhet ett vanligt bråks förvandling i decimalbråk, kan nästan alltid göras genom division med en eller annan mindre siffra än divisorn eller nämnare. Är nemligen denna sammansatt, så kan man dividera successive med hvar och en af dess factorer; — och i vidrigt fall behöfver man blott en stund dividera på vanligt sätt, tills man kommer till en rest, som står i något enkelt förhållande till en eller flere af de föregående, då man kan begagna detta förhållande till divisionens fortsättande ända till periodens slut. Om t. ex. $\frac{1}{109}$ skall förvandlas i decimalbråk, så fås först genom division:

109)1,000(0,00917'431192
och rester 1,10,100, 19
81
47
34
13
21
101
29
72

Men $81 : 72 = 9 : 8 = 1 : 1-\frac{1}{9}$, hvarföre,
då man redan funnit $\frac{81}{109} = 0,7431192\ \frac{72}{109}$
så blir $\frac{72}{109} = (1-\frac{1}{9}) . 0,7431192 = x$.

9)0,7431192
— 825688
$x = 0,6605504$, som kan tillfogas vid $\frac{81}{109}$ i stället för $\frac{72}{109}$ i slutet, som derigenom blir 0,74311926605504, af hvilket värde $\frac{72}{109}$ fås med än flere siffror, o. s. v. eller korteligen man behöfver blott minska de funna decimalerne med $\frac{1}{9}$,

och tillfoga resten småningom på sitt behöriga ställe, så att blott en division med 9 och subtration behöfva användas, jemte uppflyttning af resten:

```
9)0,0091|7431192|6605504|587155 . .
        |-825688|0733944|
         ---------------
         6605504|587155 . . .
```

Eller då $101 = 100 + 1$, och $\frac{100}{109} = 0{,}9174311| \ldots\ 926605$
samt $\frac{1}{109} = 0{,}0091743| \ldots\ 119266$
så är $\frac{101}{109} = \quad 926605| \ldots\ |504587$

således behöfves blott addition af redan funna decimaler, och summans uppflyttning till ny addition, fortsatt åt höger.

Ex. Att förvandla $\frac{1}{131}$ i decimalbråk.

Först divideras några gånger på vanligt sätt: 131)1,00(0,007'633·

```
 83
 ──
 44
 ──
 47
```

Dock blott med utsättande af resterne, hvilka befinnas vara $r_0 = 1, r_1 = 10, r_2 = 100, r_3 = 83$, $r_4 = 44$ & $r_5 = 47$, som tydligen är $= r_4 + 3 . r_0$, derföre är allmänt $r_{n+5} = r_{n+4} + 3 . r_n$, hvarigenom rest-serien kan fortsättas så:

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \qquad\qquad 8 \quad 9$
$r_n = 1, 10, 100, 83, 44, 47, \quad 77, 115, 102, 103, \ldots.$
$3 . r_n = 3, 30, \ 38, \ldots 3, = 30, 300, 249, 132, \ldots.$
eller $\qquad +38, -13, +1$

Efter således r_9 befinnes $= r_8 + r_0$, så är ock $r_{n+9} = r_{n+8} + r_n$, hvarföre fortsättningen härefter blir än lättare (102, 103,) | (X) 113, (*l*.82) 213, 165, 78, 125, (XV) 71, 186, 157, | — 2 *) vidare 111, (XX) 62, 96, 43, 37, 108, (XXV) 32, | 58, 56, 36, 98, (XXX) 63, 106, 12, 120, | 21, (XXV) 79, 4, 40, 7, 70, (XL) 45, 57, | 46, 67, 15, 19, (XLV) 59, 66, 5, 50, | (L) 107, 22, 89, 104, 123, (LV) 51, 117, 122, | 41, 17, 39, (LX) 128, 101, 93, 13, (LXV) 130∾—1.

Sedan resterne så äro uträknade, så kunna decimalerne fås efter motsvarande formler, nemligen: $\frac{47}{131} = \frac{44}{131} + 3 . \frac{1}{131}$, $\frac{1}{131} = 0{,}007'6 + (0{,}1)^4 . \frac{44}{131}$, $\frac{3}{131} = 0{,}0229 + (0{,}1)^4 . \frac{1}{131} = {,}02290076$, $\frac{44}{131} = 0{,}3 + 0{,}1 . \frac{47}{131} = 0{,}3 + 0{,}1 . \frac{44}{131} + 0{,}1 . \frac{3}{131}$. Nu kan man antingen räkna efter denna formlen, eller lösa denna eq. algebraice, då man får $0{,}9 . \frac{44}{131} = 0{,}3 + 0{,}1 . \frac{3}{131}$, och $\frac{44}{131} = \frac{1}{9} . (3 + \frac{3}{131}) = \frac{1}{9} . (3{,}02290076)$

---

*) Då således $r_{18} = -2 . r_0$, så är $r_{18+n} = -2 . r_n$, hvarföre alla följandn resterne kunna fås genom blott multiplikation med —2, såsom —2 . 10 = —20∾111, o. s. v.

hvarföre alla följande decimalerne fås ganska beqvämt genom division med 9 (i stället för med 131):

$$9)\ \frac{\overset{357}{3{,}0229}\overset{2}{0}076\,|\,335\overset{4}{8}77\overset{2}{8}6\,|\,2595}{0{,}33587786\,|\,25954198\,|\,4732}$$

nemligen först 8 stycken (till strecket), hvilka uppflyttas i dividenden efter strecket, såsom fortsättning af decimalerne för $\frac{3}{131}$, hvilka enligt formlen $\frac{3}{131} = 0{,}0229 + (0{,}1)^4 . \frac{1}{131}$ framgent bli de samma som i $\frac{1}{131}$.

Härmed kunde fortfaras, och likaledes, efter skedd uppflyttning af de nu erhållna 8, åter erhållas ännu 8, o. s. v. Eller kunna vi förkorta $\frac{1}{9} . (3 + \frac{3}{131})$ till $\frac{1}{3} . (1 + \frac{1}{131})$, hvarför vi blott behöfva dividera med 3 uti $1 + \frac{1}{131}$ eller

$$3)\ \frac{1{,}0076\,|\,3358\,|\,7786}{0{,}3358\,|\,7786\,|}$$

Men då vi vid resternes beräkning funno $r_{18} = -2$, så fås alla följande decimalerne genom blotta multiplikation med —2. Vi ha nemligen funnit $\frac{1}{131} = 0{,}007'633{\cdot}587'786\,\dot{}259'542\,\ddot{} - (0{,}1)^{18} . \frac{2}{131}$, hvarföre $-(0{,}1)^{18} . \frac{2}{131} = -(0{,}1)^{18} . 2 . \frac{1}{131} = \ldots -\ddot{0}\,015'267\,\ddot{}\,175'572^{V}519'084^{\dot{V}} + (0{,}1)^{36} . 2 . \frac{2}{131}$, således $\frac{1}{131} = 0{,}007'633{\cdot}587'786\,\dot{}259'541\,\ddot{}984732\,\ddot{}824'427^{V}480'916^{\dot{V}} \ldots$

Der vi blott behöfva dubblera de nu erhållna decimalerne och fortsätta frånragningen: nemligen af $2 . 41\ddot{}9 \ldots = 083\,\ddot{}\,969'465\,\ddot{}\,648'854^{V}961'832\ddot{}$

framflyttadt uti $\dot{V}$ $\ddot{V}$ $\dot{V}$ $\ddot{V}$ decimalrummet;

då man får som rest $916^{\dot{V}}030'534^{\ddot{V}}351'145^{\dot{V}}038'168^{\ddot{V}}$

Likaledes fås genom dubbler. häraf $832^{\ddot{V}}061'068^{\ddot{V}}702'290^{\ddot{V}}07633$

framflyttning och frånragning $167^{\ddot{V}}938'931^{X}29771{,}0^{\dot{X}}\overline{07636}$

Der efter 65 rummet — $\frac{1}{131}$ återkommmer, såsom sig bör; eller $r_{65} \backsim -1$. Sedan man så har förvandlat $\frac{1}{131}$, i decimalbråk, så har man ock $\frac{n}{131}$, blott man har en visare (Index I), hvar dess period börjar, såsom $\frac{5}{138}$ efter 48 ($\ddot{V}$) decimalen $= 0,^{\ddot{V}}038167938931 \ldots$, eftersom $I . 5 = 48$. Man kan ätnöja sig med indices för primtalen, emedan $I(p . q) = Ip + Iq$; och $Ip^n = n . Iq$.

11

Tillika fås indices (med sub-model = 130).

för	är Ind.	p.	Ind. p.
2	18 + 65 = 83	67	43
3	61 + 65 = 126	71	15
5	48	73	26 + 65
7	38	79	35
11	33 + 65 = 98	83	3
13	64	89	52
17	59	97	77
19	45	101	62
23	24 + 65	103	9
29	8 + 65	107	50
31	2 + 65	109	51 + 65
37	23	113	10
41	58	127	36 + 65
43	22	r . n	*Ir* + *In*
47	5	—1	65
53	13 + 65		
59	46		
61	39 + 65		

Ex. 1. $I46 = 18 + 24 = 42 = \ddot{V}$; $\frac{46}{131} = 0{,}351145\ldots$

Ex. 2. $I.35 = I.5 + I.7 = 48 + 38 = 86 =$ $= 65 + 21 = I(—0\dot{}000')$, hvarföre $\frac{35}{131} =$ $= 0{,}267175\ldots$

Ex. 3. $I6 = I2 + I3 = 18 + 61 = 79 = 65 + 14 =$ $= I(-0\dot{}00)$; $\frac{6}{131} = 1-0{,}954198\ldots = 0{,}0458\ldots$

Ex. 4. $I(—1) = I130 = I2 + I5 + I13 =$ $18 + 65 + 48 + 64 \backsim 65$; ty $131-1 = 130 =$ $13.2.5$ måste vara resten i 65 rummet, och således 13 i 64.

Ex. Förvandla $\frac{1}{157}$. Först fås genom division resterne $r_0 = 1$, $r_1 = 10$, $r_2 = 100$ och $r_3 \backsim 1000 - 6.157 \backsim 58$ eller $\backsim -157 + 58 = -100 + 1 = r_0 - r_2$ hvarföre i allmänhet $r_{n+3} = r_n - r_{n+2}$ d. ä. man får alltid följande rest, genom att draga den sidsta från den andre föregående: $r_4 = r_1 - r_3 = -48$ eller $= 109$, $r_5 =$ $= -109 + 100 = -9 = 1 - 10 = r_0 - r_1$, och härföre i allmänhet $r_{5+n} = r_n - r_{n+1}$ eller skilnaden mellan en rest och des följande gör den femte följande. På tvenne sätt kunna derföre resterna och således äfven decimalerne uträknas genom blott subtraction, nemligen:

1)

r_0	r_2	r_4	r_6
1	100	109	-90
10	-99	- 9	42
r_1	r_3	r_5	r_7

2) $r =$ 1, 10, 100, -99, 109 | — 9, -90, 42
+1, +10, +100, -99 | +109, - 9, -90
-9, —90, +199, -208 | 118, 81, 25
42 106

$\frac{1}{157}$ = 0,0 06|369426751
— 0,6|36 9426751
|3 69 426751

$\frac{1}{157}$ = 0,0063 6|942 6|751
— 0636 9 426|7
|9426|7 51

eller sätt straxt resten bredvid: { 006369426 . .
(såsom vid division med 11). } 636942675 . .

1) Division med 11, (101,1001 &c.) sker genom att sätta första siffran under